

## Feuille de T. D. 2 : Codes linéaires

### Exercice 1 : code linéaire

Soit le code  $C$  sur  $\mathbb{F}_2$  tel que  
 $C = \{x_1 = (1, 1, 0, 0), x_2 = (1, 1, 1, 0), x_3 = (1, 0, 1, 0)\}$ .

- 1) Ce code est-il linéaire ? Pourquoi ?
- 2) S'il n'est pas linéaire, comment le transformer en un code linéaire ?

### Exercice 2 : code linéaire description par une matrice génératrice

Soit un code linéaire sur  $\mathbb{F}_2$  dont la matrice génératrice est :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Mettre la matrice  $G$  sous forme normalisée.
- 1) Quelles sont la longueur et la dimension de ce code ?
- 2) Quel est le nombre de mots du code ?
- 3) Exhiber tous les mots du code.
- 4) Quelle est la capacité de correction du code ?
- 5) Donner la matrice de contrôle du code.

### Exercice 3 : code linéaire description par une matrice de contrôle

Soit le code de Hamming étendu dont la matrice de contrôle est

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Mettre la matrice H sous forme normalisée.
- 2) Quelles sont la longueur et la dimension de ce code ?
- 3) Quelle est la distance minimale du code ?
- 4) Donner la matrice génératrice du code.
- 5) Soit les mots reçus  $y_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$  et  $y_2 = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$ , sous l'hypothèse d'une seule erreur commise au plus, décoder  $y_1$  et  $y_2$ .
- 6) Donner les paramètres et la matrice génératrice de l'orthogonal du code.

### Exercice 4 : Codes Simplexes

Un code Simplexe sur  $\mathbb{F}_2$  est un code de longueur  $2^m - 1$  admettant pour matrice génératrice une matrice  $(m \times (2^m - 1))$  dont les colonnes sont tous les m-uplets non nuls de  $\mathbb{F}_2$ .

Pour  $m = 3$  :

- 1) Donner une matrice génératrice. Quelle est la dimension du code ?
- 2) Exhiber tous les mots du code. Que remarque-t-on ?
- 3) Donner la distance minimale et la capacité de correction du code.
- 4) Quels sont les paramètres du code dual du code Simplexe ?
- 5) Exhiber tous les mots du code dual du code Simplexe.
- 6) Pour  $m \in \mathbb{N}$  quelconque, montrer que le dual d'un code Simplexe est un code de Hamming.

### Exercice 5 : Codes de Hamming

Un code de Hamming sur  $\mathbb{F}_2$  est un code de longueur  $2^m - 1$  admettant pour matrice de contrôle une matrice dont les  $2^m - 1$  colonnes sont tous les  $m$ -uplets non nuls de  $\mathbb{F}_2$

- 1) Montrer que la dimension du code est  $2^m - 1 - m$ .
- 3) Montrer que la capacité de correction est 1.

### Exercice 6 (facultatif) : poids

Soit  $K$  un corps fini, Démontrer que le poids vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall x, y \in K^n \text{ et } \forall \lambda \in K$$

- i)  $d(x, y) = w(x - y)$ ;
- ii)  $w(x) = d(x, 0)$ <sup>1</sup>;
- iii)  $w(x) = 0$  si et seulement si  $x = (0)$ ;
- iv)  $w(\lambda x) = w(x)$  si  $\lambda \neq 0$ ;
- v)  $w(x, y) \leq w(x) + w(y)$ .

---

<sup>1</sup>Par abus de langage on note  $O$  le mot nul.